Доклады Академии наук СССР
1959. Том 129, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. МОЛЧАНОВ

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВАРИАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

(*Представлено академиком М. В. Келдышем 15 VIII 1959*)

Система уравнений гидродинамики имеет вид

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial U^\alpha}{\partial x}=0, \tag{1}$$

где (для случая лагранжевых координат)

$$\begin{aligned} &u^{(1)}=u, \quad u^{(2)}=v, \quad u^{(3)}=E+\frac{u^2}{2},\\ &U^{(1)}=p, \quad U^{(2)}=-u, \quad U^{(3)}=pu, \end{aligned} \tag{2}$$

u — скорость, v — удельный объем, p — давление, $E=E(p, v)$ — плотность внутренней энергии.

Целью заметки является доказательство ограниченности вариации решения системы (1). При этом предполагается, во-первых, что начальные данные имеют ограниченную вариацию, и, во-вторых, что решение непрерывно в полосе $0\leqslant t\leqslant t_0$, $-\infty<x<+\infty$. Второе предположение по существу дела лишнее, но оно позволяет провести доказательство, применяя сравнительно несложную технику. При этом отчетливо выступают важные особенности системы уравнений гидродинамики, наталкивающие на мысль выделить из гиперболических систем уравнений вида

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t}+U^\alpha_\beta\frac{\partial u^\beta}{\partial x}=0 \tag{3}$$

(где U^α_β — функции переменных u^α) особый класс уравнений типа гидродинамики.

Эти системы выделяются требованием наличия у них функций, играющих в определенном отношении роль энтропии в гидродинамике. Так как такое условие является условием типа равенства, то «энтропийные» системы образуют весьма узкий класс среди общих гиперболических систем. Для всех этих систем проходит приводимое ниже доказательство ограниченности вариации решения. «Энтропийные» системы занимают промежуточное положение между линейными системами, для которых корректна в целом задача Коши, и общими системами (3), для которых нормальным случаем является, по-видимому, обращение решения в бесконечность при конечных t даже для как угодно гладких и равных постоянной вне интервала начальных данных.

Наметим путь доказательства. Выкладки сильно выигрывают в ясности, если проводить их в общем виде для системы (3) с любым числом уравнений. Наша ближайшая цель — записать систему (3) в виде эквивалентной системы интегральных уравнений, из которых можно затем получить оценку для $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial u^\alpha}{\partial x}\right|dx$. Это можно сделать, удвоив число неизвестных функций введением в рассмотрение наряду с u^α функций $v^\alpha = \partial u^\alpha / \partial x$. Система уравнений для v^α получается дифференцированием уравнений (3) по x и имеет вид

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U^\alpha_\beta v_\beta) = 0. \tag{4}$$

Для получения интегральных уравнений удобно заменить систему (4) более простой диагональной системой для других функций φ^μ, являющихся линейными комбинациями v^α с коэффициентами, зависящими от u^α:

$$\varphi^\mu = l^\mu_\alpha v^\alpha. \tag{5}$$

Функции φ^μ уже не являются полными производными каких-либо функций от u^α, как это имело место для v^α. Однако $\varphi^\mu dx = l^\mu_\alpha du^\alpha$ есть линейная комбинация дифференциалов du^α, и это выражение удобно записывать, как делают в термодинамике, в виде $\delta\psi^\mu = l^\mu_\alpha du^\alpha$ и говорить о собственном «дифференциале», помня, конечно, что не всегда можно найти $\psi^\mu(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)})$, дифференциал который был бы равен $l^\mu_\alpha du^\alpha$. Матрицу, обратную к l^μ_α, обозначим m^α_ν, так что $l^\mu_\alpha m^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu$. После несложных выкладок получаем

$$\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial t} + \Lambda^\mu_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda^\mu_\alpha}{\partial x}\varphi^\alpha = C^\mu_{\alpha\beta}\varphi^\alpha\varphi^\beta, \tag{6}$$

где

$$\Lambda^\mu_\nu = l^\mu_\gamma U^\gamma_\delta m^\delta_\nu, \tag{7}$$

$$C^\mu_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial l^\mu_\gamma}{\partial u^\delta} - \frac{\partial l^\mu_\delta}{\partial u^\gamma}\right)\Lambda^\gamma_\varepsilon m^\delta_\alpha m^\varepsilon_\beta. \tag{8}$$

Существование матрицы l^μ_γ, приводящей U^γ_δ к диагональному виду Λ^μ_ν, вытекает, конечно, прямо из гиперболичности системы (3). Матрица m^δ_ν состоит просто из собственных векторов U^γ_δ, а векторы, составляющие l^μ_γ, образуют систему, биортогональную к этим собственным векторам. Но так как собственные векторы определены лишь с точностью до множителя, то матрицу l^μ_γ можно слева умножить на любую диагональную, не меняя матрицы Λ^μ_ν.

Указанным произволом можно воспользоваться для того, чтобы максимально упростить структуру тензора $C^\mu_{\alpha\beta}$. Попробуем, например, добиться равенства нулю правой части в одном из уравнений системы (6). Из (8) видно, что, вообще говоря (при $\Lambda^\mu_\nu \neq 0$), это будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial l^\mu_\gamma}{\partial u^\delta} - \frac{\partial l^\mu_\delta}{\partial u^\gamma} = 0, \tag{9}$$

т. е. в том и только в том случае, когда собственный «дифференциал» $\delta\psi^\mu = l^\mu_\alpha du^\alpha$ является полным дифференциалом. Точнее, тогда, когда собственный дифференциал имеет интегрирующий множитель. Для системы двух уравнений оба собственных дифференциала имеют интегрирующий множитель. Для систем большего числа уравнений, как правило, ни один из собственных дифференциалов не имеет интегрирующего множителя. Тем более замечателен тот факт, что уравнения гидродинамики представляют собою исключение в этом отношении. Наличие у этой системы интегрирующего множителя для одного из собственных «дифференциалов» эквивалентно известному термодинамическому тождеству

$$dS = \frac{1}{T}(dE + p\,dv). \tag{10}$$

Это замечание дает основание ввести термин «энтропия» для любого интегрируемого собственного дифференциала.

Возвращаясь к общей системе (6), заметим, что решения такой системы обращаются в бесконечность уже при конечном t_0, даже если при $t=0$ заданы как угодно гладкие начальные данные. Это хорошо видно на примере следующей модельной * системы:

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}=\varphi^{(2)}\varphi^{(3)},\qquad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}=\varphi^{(3)}\varphi^{(1)},\qquad \frac{\partial\varphi^{(3)}}{\partial t}-\frac{\partial\varphi^{(3)}}{\partial x}=\varphi^{(1)}\varphi^{(2)} \tag{11}$$

с начальными данными $\varphi^{(1)}(x,0)=\varphi^{(2)}(x,0)=\varphi^{(3)}(x,0)=a(x)$ при $t=0$, где $a(x)$ — четная по x функция, равная единице на отрезке (0,2), гладко опускающаяся до нуля на отрезке (2,3) и равная нулю на луче $(3,\infty)$. Нетрудно проверить, что в прямоугольнике $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t<1$ решение дается формулой

$$\varphi^{(1)}(x,t)=\varphi^{(2)}(x,t)=\varphi^{(3)}(x,t)=\frac{1}{1-t}. \tag{12}$$

Явление, иллюстрируемое примером системы (11), существенно отличается от явления «опрокидывания фронта» («градиентной катастрофы») в одном уравнении (или в системе двух уравнений). Разница состоит в том, что в одном уравнении рост φ автоматически вызывает сжатие характеристик, которое компенсирует увеличение φ. Это хорошо видно из уравнений (6). Если $C^{\mu}_{\alpha\beta}=0$, то для роста φ необходимо, чтобы $\partial\Lambda/\partial x<0$, а это и означает, что характеристики сжимаются. Нетрудно проверить, что сжатие получается точно такое, какое нужно, чтобы обеспечить сохранение интеграла от абсолютной величины φ. Если же $C^{\mu}_{\alpha\beta}\neq 0$, то может случиться, что члены $C^{\mu}_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}$ вызовут рост φ, не компенсируемый сжатием характеристик. Более того, это может произойти и на участке расширения характеристик, так что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi|\,dx$ будет расти по обеим причинам.

Таким образом, выделение членов $C^{\mu}_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}$ означает, по-видимому, выделение некомпенсируемой части квадратичной формы — части, могущей вызвать обращение решения в бесконечность при конечном t_0. Уравнения (6) и соотношения (8) отчетливо показывают разницу в происхождении членов вида $\frac{\partial\Lambda^{\mu}_{\alpha}}{\partial x}\varphi^{\alpha}=\frac{\partial\Lambda^{\mu}_{\alpha}}{\partial u^{\gamma}}m^{\gamma}_{\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}$ и членов вида $C^{\mu}_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}$. Первые обязаны своим происхождением переменности собственных значений матрицы U^{α}_{β} и автоматически компенсируются сжатием характеристик. Вторые вызваны вращением ** собственных векторов, и для них не видно компенсирующих

* Система эта модельна в том смысле, что неясно, можно ли указать систему вида (3) и тем более вида (1), из которой описанным выше построением получится именно система (11). Из формулы (7) вытекает, что можно построить систему вида (3) с любыми постоянными Λ^{μ}_{ν}. При этом еще остается произвол в выборе матрицы l^{μ}_{γ}, используя который можно надеяться получить постоянные $C^{\mu}_{\alpha\beta}$. Однако совершенно неясно, можно ли таким способом построить систему вида (1).

** Нечто похожее происходит, вероятно, уже в системах обыкновенных уравнений $d\mathbf{r}/dt=A(t)\mathbf{r}$. Положим $A=U\Lambda U^{-1}$, где Λ — постоянная треугольная матрица с отрицательными собственными значениями, а $U=e^{St}$, где S — постоянная антисимметричная матрица. Хотя у матрицы A все собственные значения отрицательны, заключать отсюда об устойчивости системы по Ляпунову можно только при медленном вращении U, т. е. при малых S. Если же взять, например, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, а $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, то система становится неустойчивой.

факторов. Во всяком случае эти факторы отсутствуют, если в системе вида (6) заменить постоянными коэффициенты, зависящие от u.

Переходя к доказательству основной теоремы, дадим прежде всего точное определение системы уравнений типа гидродинамики.

Определение 1. Собственный «дифференциал» $\delta\varphi^{\mu_0} = l_\alpha^{\mu_0} du^\alpha$ и соответствующее уравнение в (6) называются энтропийными, если $\delta\varphi^{\mu_0}$ является полным дифференциалом, т. е. если $C_{\alpha\beta}^{\mu_0} = 0$ при всех α и β.

Определение 2. Система уравнений (3) называется системой типа гидродинамики, если она имеет по крайней мере одну «энтропию», а в неэнтропийных уравнениях системы (6) коэффициенты $C_{\alpha\beta}^{\mu}$ при произведениях любых двух неэнтропийных членов $\varphi^\alpha\varphi^\beta$ равны нулю.

Замечание. Для того чтобы система трех уравнений была системой типа гидродинамики, достаточно, чтобы она имела «энтропию». Действительно, в этом случае выбором матрицы l_α^μ можно добиться того, чтобы тензор $C_{\alpha\beta}^\mu$ имел нужную структуру. Для этого достаточно обратить в нуль два коэффициента C_{12}^1 и C_{12}^2. Равенства $C_{12}^1 = 0$ и $C_{12}^2 = 0$ дают два условия на длины двух собственных неэнтропийных векторов.

Пусть теперь дана система типа гидродинамики. Напишем для нее систему (6), перенумеровав, если надо, уравнения так, чтобы первыми шли энтропийные уравнения:

$$\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\Lambda_\alpha^\mu\varphi^\alpha) = 0, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n_0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\Lambda_\alpha^\nu\varphi^\alpha) = p_\gamma^\nu\varphi^\gamma + q^\nu, \quad n_0 + 1 \leqslant \nu \leqslant n. \tag{14}$$

Здесь коэффициенты p_γ^ν выражаются через «энтропийные» члены φ^μ линейно, а q^ν — квадратично.

Таким образом, для систем типа гидродинамики происходит «отщепление» энтропийных уравнений, которые (если считать заданными функции Λ_ν^μ и $C_{\alpha\beta}^\mu$, что допустимо для получения априорных оценок) интегрируются независимо и дают решения, для которых $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^\mu(x, t)|\,dx$ равномерно ограничен при всех $t > 0$.

Для неэнтропийных членов возникает система линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от энтропийных членов. Для такой системы интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^\nu(x, t)|\,dx$ уже не остаются, вообще говоря, ограниченными. Однако их рост происходит со скоростью не быстрее, чем

$$\exp\left(\int\limits_0^t a\,dt\right), \text{ где } a(t) = \max_{1\leqslant\mu\leqslant n_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^\mu(x, t)|\,dx.$$

Эту оценку можно доказать, например, записав уравнения (14) в виде интегральных уравнений вдоль соответствующих характеристик и применяя к полученным интегральным уравнениям метод последовательных приближений.

Замечание. В этом доказательстве существенно используется тот факт, что для любых систем $C_{\alpha\alpha}^\mu = 0$ при любых μ и α. Это утверждение получается непосредственно из (8), если учесть, что $\Lambda_\varepsilon^\gamma$ — диагональная матрица. Оно приводит к простой оценке для членов q^ν:

$$\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |q^\nu(x, t)|\,dx\,dt \leqslant \text{const} \max_{\substack{1\leqslant\mu\leqslant n_0 \\ 0\leqslant t\leqslant t_0}} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^\mu(x, t)|\,dt\right]^2.$$

Поступило
11 VIII 1959